ریاضی عمومی ۱
پاییز ۹۵-۹۴

به نام خدا

دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

فصل اول-عدد چیست؟

فعالیت ۱ (تعریف اعداد حقیقی).

الف) عدد گویا چیست؟

ب) عدد حقیقی چیست؟

ج) اگر اعداد حقیقی اجتماع اعداد گویا و گنگ است؛ پس عدد گنگ چیست؟

فعالیت ۲ (ارتباط اعداد گویا و خط حقیقی).

الف) دو عدد حقیقی(!) a و b ($a \neq b$) را در نظر بگیرید. یک عدد گویا بین این دو بیابید.
راهنمایی: عدد n را طوری انتخاب کنید که $|a-b| > ۱/۱۰^n$.

ب) نشان دهید بین هر دو عدد حقیقی(!) a و b ($a \neq b$) نامتناهی عدد گویا وجود دارد.

توجه. در واقع اعداد گویا در مجموعه اعداد حقیقی(!) چگال هستند. بدین معنی که در هر بازه از اعداد حقیقی، عددی گویا وجود دارد. در واقع نشان دادیم که در هر بازه، نامتناهی عدد گویا وجود دارد.

فعالیت ۳ (نمایش اعشاری).

الف) نمایش اعشاری چیست؟ چگونه آن را معنا می‌دهیم؟

ب) جمع نامتناهی به چه معناست؟ مقدار جمع زیر را بیابید.

$$۱+۱-۱+۱-\dots=?$$

الف) آیا $۱-۱+۱-۱+\dots=۱/۲$؟ آیا می‌توان نشان داد $۱+۲+۴+۸+۱۶+\dots=-۱$؟

ب) نشان دهید که بسط اعشاری یک عدد به عنوان مجموع نامتناهی کراندار است و به بی‌نهایت میل نمی‌کند؟

ج) به نظرتان مشکل در جمع $۱-۱+۱-۱+\dots$ چیست؟ آیا بسط اعشاری نیز چنین مشکلی دارد؟

فعالیت ۴ (بسط اعشاری اعداد گویا).

الف) بسط اعشاری ۱/۳ را بنویسید.

ب) نشان دهید یک بسط اعشاری عددی گویا است اگر و تنها اگر مختومه یا متناوب باشد.
راهنمایی: به باقیمانده‌ها در تقسیم‌ها توجه کنید.

فعالیت ۵ (رابطه بسط اعشاری و خط حقیقی)**.** عدد اعشاری $C = c_۰.c_۱c_۲c_۳\cdots$ را در نظر بگیرید. تعریف می‌کنیم $C_n = c_۰.c_۱c_۲\cdots c_n$.

الف) نشان دهید $C_n \leq C \leq C_n + ۱/۱۰^n$.

ب) خط حقیقی را در نظر بگیرید و با کمک قسمت (الف) نشان دهید هر بسط اعشاری مانند C متناظر با یک نقطه روی خط حقیقی است؟

توجه. به صفحه ۱۲ کتاب، کادر آبی بالای صفحه مراجعه کنید. از این به بعد خط حقیقی و اعداد اعشاری برای ما یکی هستند.

ج) اگر C و C' دو عدد حقیقی باشند که $|C - C'| < ۱/۱۰^n$ برای هر $n \in \mathbb{N}$، آنگاه ثابت کنید $C = C'$.
راهنمایی: از خاصیت ارشمیدس استفاده کنید!

د) طبق اصل تمامیت $۰/۹۹۹\cdots$ یک عدد حقیقی است. برای هر n طبیعی داریم

$$۰/۹۹\cdots۹(\text{بار n}) \leq ۰/۹۹۹\cdots \leq ۰/۹۹\cdots۹(\text{بار n}) + \frac{۱}{۱۰^n} = ۱.$$

پس بدست می‌آید $۱ = ۰/۹۹۹\cdots$؛ به عبارت دیگر داریم

$$|۱ - ۰/۹۹۹\cdots| \leq \frac{۱}{۱۰^n} \quad \forall n \geq ۱.$$

و در نتیجه از (ج) تساوی بدست می‌آید.

توجه. در واقع نشان دادیم نمایش اعشاری اعداد یکتا نیست.

فعالیت ۶ (کوچکترین کران بالایی)**.**

الف) $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^۲ < ۲\}$ در نظر بگیرید. این زیرمجموعه از بالا کران‌دار است. مجموعه کران‌های بالای A را بنویسید.

ب) کوچکترین کران بالای A کدام است؟

اینکه هر زیرمجموعه ناتهی از $\mathbb{R}$ که از بالا کران‌دار است، دارای کوچکترین کران بالایی در اعداد حقیقی است معادل «اصل تمامیت» است. این معادل بودن را در صفحات ۱۳ و ۱۴ کتاب بخوانید. با توجه به

مجموعه A درمی‌یابیم که مجموعه $\mathbb{Q}$ دارای خاصیت تام بودن (اصل تمامیت) نیست؛ زیرا مجموعه A هیچ کوچکترین کران بالایی گویا ندارد.

ج) فرض کنید A و B دو زیرمجموعه ناتهی $\mathbb{R}$ باشند. مجموعه $A+B$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$A+B=\{a+b : a\in A, b\in B\}.$$

ثابت کنید اگر A و B از بالا کران‌دار باشند، $A+B$ نیز از بالا کران‌دار است و کوچکترین کران بالایی $A+B$ برابر با مجموع کوچکترین کران بالایی A و B است.